平成 23 年 7 月 26 日出題分

数学演習 I 第 10 回レポート (b)

学籍番号 ____________________ 氏名 ________________________

問: オイラーの公式を用いて $w^3 = 8i$ を満たす複素数 w をすべて求めよ。

ヒント：$w = re^{i\theta}$ とおき、$8i$ も極形式で表して解くと良い。また、この問題は 3 乗根を求めるので、w は異なる 3 つの解 w_1, w_2, w_3 を持つはずである。

質問事項 (授業内容に関する物に限る)

教員の回答:

解答例: $w = re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$ とおいて、r と θ の値を求める。

$$\begin{aligned}
\text{与式の左辺} &= w^3 = (re^{i\theta})^3 = r^3 e^{3i\theta} \\
\text{与式の右辺} &= 8i = 0 + 8i = 8(0 + 1 \cdot i) \\
&= 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right) = 8\left(\cos\frac{4n+1}{2}\pi + i\sin\frac{4n+1}{2}\pi\right) \\
&= 8e^{\frac{4n+1}{2}\pi i} \quad (n = 0, 1, 2)
\end{aligned}$$

(3 乗根なので、n は上記の 3 通りで、すべての異なる w の値を表せる。)
以上より、与式は

$$r^3 \cdot e^{3i\theta} = 8 \cdot e^{\frac{4n+1}{2}\pi i} \quad (n = 0, 1, 2)$$

となるので、$r^3 = 8$ より $r = 2$（∵極形式なので r は正の実数）
$3\theta = \dfrac{4n+1}{2}\pi \quad (n = 0, 1, 2)$ より

$$\theta = \frac{4n+1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

以上より、求める w の値を w_1, w_2, w_3 とおくと、

$$\begin{aligned}
w_1 &= 2 \cdot e^{\frac{\pi}{6}i} = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i \\
w_2 &= 2 \cdot e^{\frac{5}{6}\pi i} = -\sqrt{3} + i \\
w_3 &= 2 \cdot e^{\frac{3}{2}\pi i} = -2i
\end{aligned}$$

事前説明のメモ (教員用)

- 注意すべき点は、$8i$ を $\exp\{\frac{\pi}{2}+2n\pi\}$ とするとき、$2n\pi$ が抜けてしまうことがよくある。そのため学生は $-2i$ 以外の解を見つけられないことが多い。この場合、例えば $\sqrt{3}+i$ の 3 乗を計算させ、$-2i$ 以外の解が存在することを認識させ、$2n\pi$ へと導く。

以下余白