

数学演習 I の演習レポート (a)

提出日：平成 23 年 7 月 26 日

番 号：

名 前：

問題 関数 f と g がつぎの関係で結ばれているとする.

$$\sqrt{3}f'(x) + f(x) = g(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

① f と g をつぎの形のものに限定したとき, 複素数 F と G の関係を求めよ.

$$f(x) = \operatorname{Im}(Fe^{ix}), \quad g(x) = \operatorname{Im}(Ge^{ix})$$

②上の結果を用いて, $g(x) = \sin x$ に対応する $f(x)$ を $a \sin(x+b)$ の形に表わせ.
ただし, a は非負の実数, b は実数とする.

解答 (数式のための羅列は不可)

質問事項 (授業内容に関するものに限る)

教員の回答：

数学演習解答例（7月26日の課題 a）

①与えられた条件をもとに得られる表現式,

$$f(x) = \operatorname{Im}(Fe^{ix}), \quad f'(x) = \operatorname{Im}(i \cdot Fe^{ix}), \quad g(x) = \operatorname{Im}(Ge^{ix})$$

を最初の等式に代入すると, つぎの等式を得る.

$$\sqrt{3} \operatorname{Im}(i \cdot Fe^{ix}) + \operatorname{Im}(Fe^{ix}) = \operatorname{Im}(Ge^{ix}).$$

これは, さらにつぎのように書き直すことができる.

$$\operatorname{Im}\{(1+i\sqrt{3})F - G\}e^{ix} = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

これから, F と G の間にはつぎの関係が成立たなければならない.

$$(1+i\sqrt{3})F - G = 0, \quad \text{すなわち } F = \frac{G}{1+i\sqrt{3}}.$$

② F と G の間に上で求めた関係があるなら, f と g は最初の等式を満足することに注意する. この問題の関数 g を表現する複素数 G は 1 であるから, f を表現する F は,

$$F = \frac{1}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

となる. これを f に翻訳すると,

$$f(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{ix}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2} e^{i\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

が得られる. \square

事前説明のメモ（教員用）

- 複素数から虚部を取り出す操作 $\text{Im}(\cdot)$ は線形であり，微分操作と交換することを説明する．
- ヒントとして， $f(x) = \text{Im}(Fe^{ix})$ ， $g(x) = \text{Im}(Ge^{ix})$ なる表現形式のもとで，

$$f'(x) + f(x) = 2g(x), \quad -\infty < x < +\infty \Leftrightarrow (1+i)F - 2G = 0$$

が言えることを説明し，つぎの例題を示す： $g(x) = \cos x$ のときは， $G = i$ なので，対応する f を表現する F は，

$$F = \frac{2i}{1+i} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

となり，これから， $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. \square

以下余白