平成 23 年 5 月 24 日出題分

数学演習 I 第 3 回レポート (b)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問: 複素数 $c = a + bi$(ただし $b \neq 0$) について、

$$c + \frac{1}{c} \quad (c \neq 0)$$

が実数となるような条件は、複素数 c が複素平面上の単位円周上にあることを示せ。

質問事項 (授業内容に関する物に限る)

教員の回答:

解答例:

$c = a + bi$ より

$$
\begin{aligned}
c + \frac{1}{c} &= (a+bi) + \frac{1}{a+bi} \\
&= (a+bi) + \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\
&= (a+bi) + \frac{a-bi}{a^2+b^2} \\
&= \frac{(a+bi)(a^2+b^2) + a - bi}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a^3 + ab^2 + a^2bi + b^3i + a - bi}{a^2+b^2} \\
&= \frac{(a^3 + ab^2 + a) + (a^2b + b^3 - b)i}{a^2+b^2}
\end{aligned}
$$

よって、$c + \frac{1}{c}$ が実数であるための条件は $a^2b + b^3 - b = 0$。今 $b \neq 0$ なので、この両辺を b で割ると

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 - 1 &= 0 \\
a^2 + b^2 &= 1 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

よって (1) 式より、複素数 c は複素平面上の単位円周上にある。q.e.d.

別解として、複素数の実数条件

$$c + \frac{1}{c} = \overline{\left(c + \frac{1}{c}\right)} \qquad (2)$$

から、$c\bar{c} = |c|^2 = 1$ を導いてもよい。

事前説明のメモ (教員用)

- 別解について、問題 a との関連で教えても良い。
- 他の説明は、問題 a と同様につき略。

以下余白