

# 公開鍵暗号方式について

形式化数学研究室

宮島啓一

- 公開鍵暗号方式とは
- RSA公開鍵暗号方式について

# 共通鍵暗号と公開鍵暗号

## 共通鍵暗号方式 (Common Key Cryptosystem)

送信者と受信者が同じ秘密鍵を共有する暗号方式  
暗号化と複合化で同じ鍵を用いる方式  
例) ブロック暗号、ストリーム暗号等

## 公開鍵暗号方式 (Public Key Cryptosystem)

送信者は公開されている鍵で暗号化し、受信者は秘密にされている鍵で複合化する暗号方式  
例) RSA暗号等

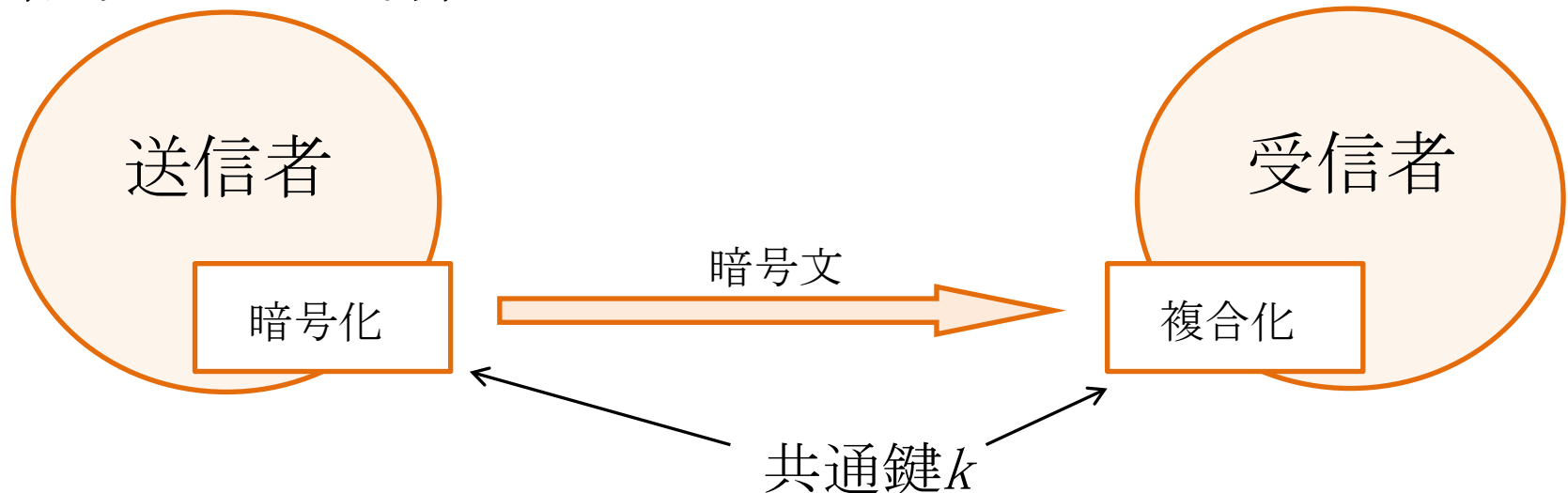
# 共通鍵暗号方式 (Common Key Cryptosystem)

鍵配送の問題(デメリット)

送信者と受信者が第三者に知られる事なく同じ秘密鍵を共有しなくてはならない。



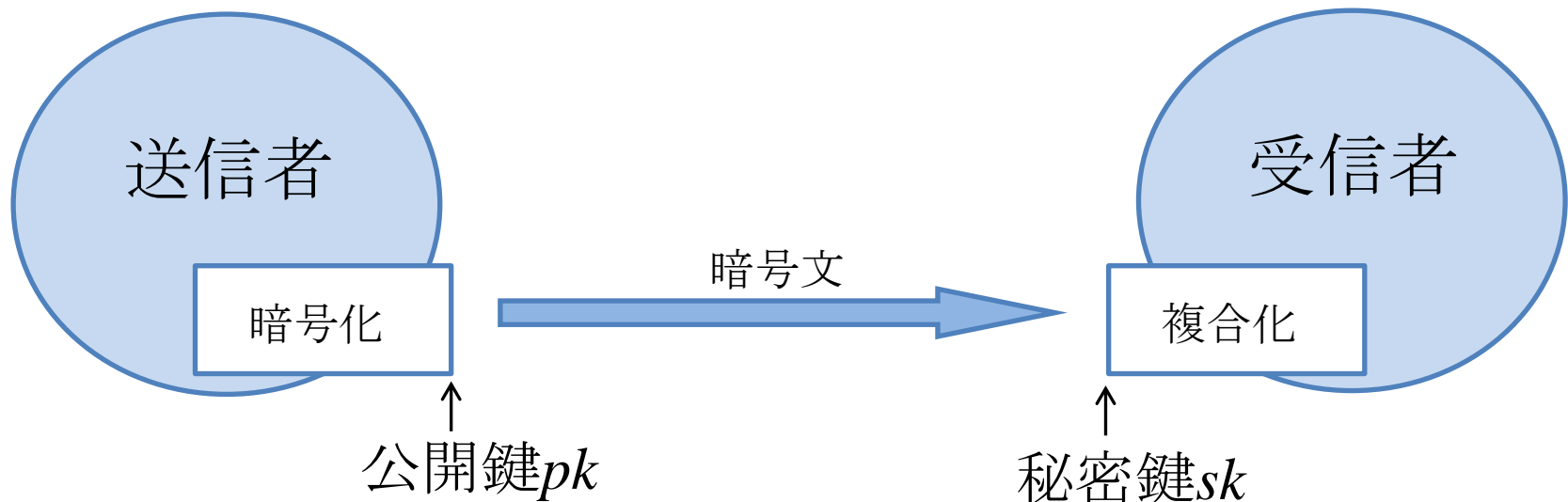
1976年、暗号史上最大のブレイクスルーである公開鍵暗号方式の考案



# 公開鍵暗号方式 (Public Key Cryptosystem)

公開鍵暗号方式についての最初の論文は1976年に、  
ホイットフィールド・ディフィーによって発表された。

暗号化に使用する鍵 $pk$ は公開してしまい復合化に使用  
する鍵 $sk$ のみ秘密にしておくというもの

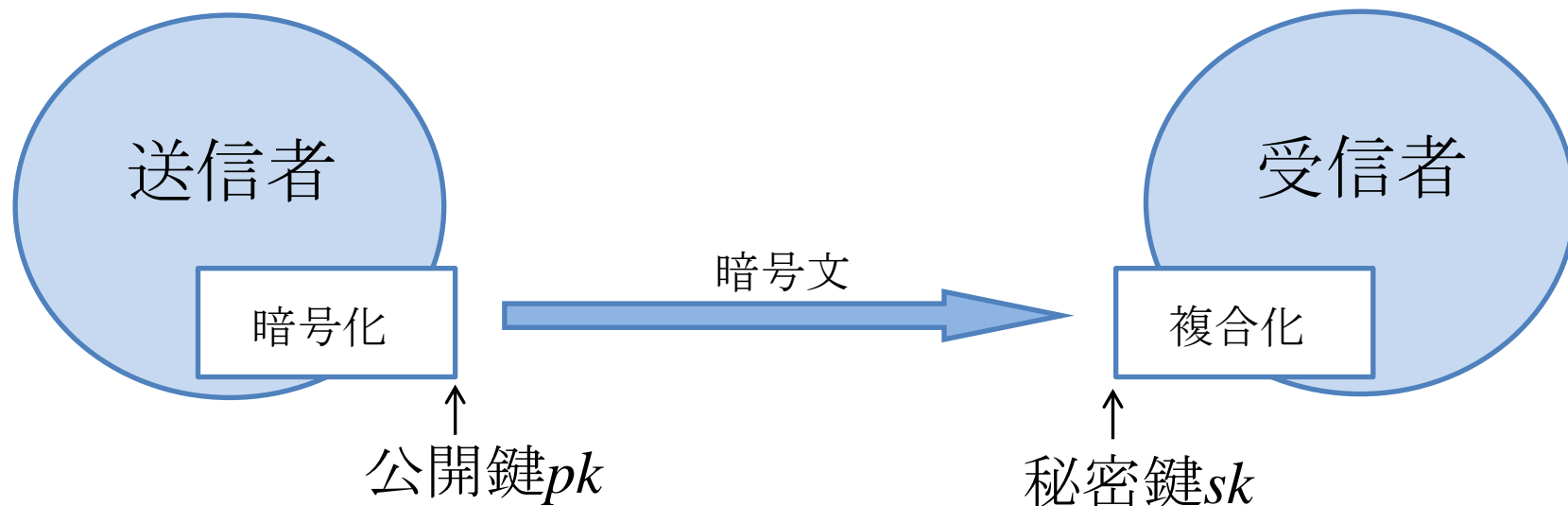


# 公開鍵暗号方式 (Public Key Cryptosystem)

暗号化は誰でもできるが復合化できるのは鍵の作成者である受信者のみ



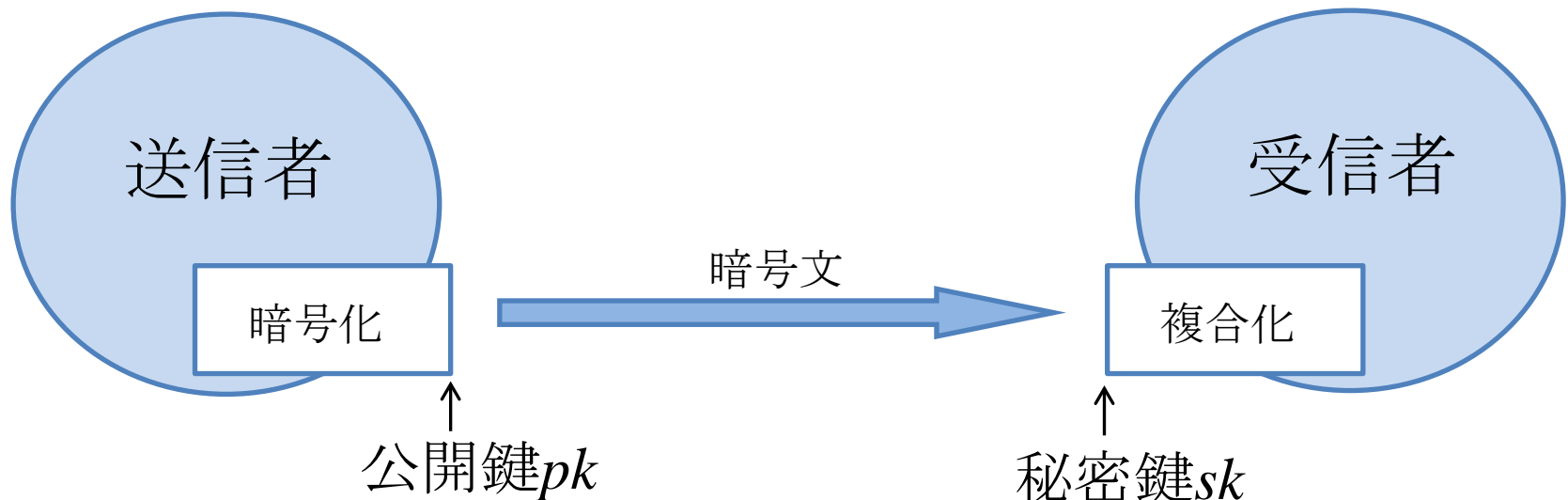
公開鍵暗号方式により、鍵配送の問題を解決できる。



# 公開鍵暗号方式 (Public Key Cryptosystem)

今までの共通鍵暗号方式と比較して、

- 相手の数に関係なく公開鍵は一つで良い
  - 鍵の共有が容易でありかつ安全性が高い
- といった利点がある。



- 公開鍵暗号方式とは
- RSA公開鍵暗号方式について
- ペピンの判定法の形式化



# RSA暗号方式

最も典型的な公開鍵暗号方式がRSA暗号方式である

RSA暗号の場合、

「大きな素数同士の掛け算は簡単であってもその逆の素因数分解は難しい」

という性質を利用している

(一方向性関数の性質を利用している)

# 素因数分解仮定

2つの素数 $p$ 、 $q$ を例えば $p=257$ 、 $q=251$ としたとき、合成数を求めるのは容易である。

$$p \times q = 257 \times 251 = 64507$$

この計算は容易

しかし、64507を素因数分解し、257と251という2つの素数を求めることは困難である。

この計算は困難

$$64507 = (\text{素因数分解}) = 257 \times 251$$

このような2つの素数の合成数を素因数分解する効率的なアルゴリズムは存在しないと予想されている。

# RSA暗号 (1)

## 鍵生成アルゴリズム

- (1) 二つの素数  $p$ 、 $q$  をランダムに選び、 $N=pq$  とする
  - (2)  $\gcd(e, (p-1)(q-1)) = 1$  となる  $e$  をランダムに選ぶ。
  - (3)  $ed = 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$  を満たす  $d (> 0)$  を求める。
  - (4) 公開鍵を  $(N, e)$ 、 $d$  を秘密鍵とする。
- (2)のgcdとは、ユークリッドの互換方といい、二つの正整数の最大公約数を求めるアルゴリズムである

# RSA暗号 (2)

## 暗号化アルゴリズム

平文の集合を $Z_N$ とする。公開鍵 $(N, e)$ , および平文 $m \in Z_N$ に対し,  
暗号文  $c$  を

$$c = m^e \bmod N$$

と計算する。

# RSA暗号(3)

## 復号アルゴリズム

秘密鍵 $d$ 、および暗号文 $c \in Z_N$ から、平文 $m$ を

$$m = c^d \bmod N$$

と計算する。

# RSA方式の実例

RSA方式の実例を紹介する。前項までで紹介したとおりの条件で実際に値を代入する。

$p=11, q=37$ とすると $N=p \times q=407$ となる。また、公開鍵を7、秘密鍵を103とし、通信文を234とする。

$$\begin{aligned} 234^7 \bmod 407 &\equiv (234^5 \times 234^2) \bmod 407 \\ &\equiv (155 \times 218) \bmod 407 \equiv 9 \end{aligned}$$

となり、暗号文9を導き出せた。また、復号化は

$$9^{103} \bmod 407 \equiv 234$$

より、導ける。

# RSA公開鍵暗号方式の安全性

素因数分解は大きい数であればあるほど困難になる



つまり、RSA暗号の強度は使用される2つの素数の大きさに依存する

# RSA公開鍵暗号方式の安全性

- 内閣官房情報セキュリティセンター「情報セキュリティ政策会議」にて1024ビットのRSA暗号の安全性低下を指摘

平成24年10月26日改定 情報セキュリティ対策推進会議決定  
政府機関の情報システムにおいて使用されている暗号アルゴリズムSHA-1及びRSA1024に係る移行指針  
[http://www.nisc.go.jp/active/general/pdf/angou\\_ikoushishin.pdf](http://www.nisc.go.jp/active/general/pdf/angou_ikoushishin.pdf)

- Googleでは2013年に2048ビットRSA暗号化キーへのアップグレードを完了

グーグル、2048ビットRSA暗号化キーへのアップグレードを完了 - CNET Japan:  
<http://japan.cnet.com/news/service/35040219/>

- LINEは2014年6月に暗号化に2048ビットRSAを採用していることを明かした

LINEは2048ビットRSA採用 「暗号化が弱いためデータ流出の可能性」は「誤解」と技術ブログで説明 - ITmedia ニュース:  
<http://www.itmedia.co.jp/news/articles/1406/26/news113.html>



# RSA公開鍵暗号方式の安全性

RSA公開鍵暗号方式の安全性を維持するには大きい素数を見つける必要がある。

(2016年1月現在では2,233万8,618桁)

(2進数では74,207,281bit)

# 参考文献

- 現代暗号への招待

サイエンス社 著者 黒澤 馨

- Aiichi Yamasaki's Homepage

<http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/index.php?a3f>

ご清聴ありがとうございました。