平成 23 年 8 月 2 日出題

数学演習 I 纏めの演習問題 (b)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問: $I = \int_0^{2\pi} e^x \cos x dx$, $J = \int_0^{2\pi} e^x \sin x dx$ なる I,J があるとする。
(a) オイラーの公式を用いて、

$$\int_0^{2\pi} e^{x+ix} dx = I + i \cdot J \tag{1}$$

となることを、証明せよ。(5 点)
解答)

(b) (1) 式の左辺を積分し、(実部)+i·(虚部) の形にせよ。(10 点)
なお、複素係数の指数関数を含む関数の微積分や、微分積分の基本定理は、実係数と同じように扱ってもよいことは周知であるとする。
解答)

(c) I と J の値を求めなさい。(2 つできて 5 点、1 つしかできないときは 2 点)
解答)

纏めの演習問題 (b) の解答例:

(a) オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$ より、この両辺に e^x をかけて

$$e^{x+ix} = e^x \cos x + i \cdot e^x \sin x$$

この両辺の定積分を求めると、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{x+ix} dx &= \int_0^{2\pi} e^x \cos x dx + i \cdot \int_0^{2\pi} e^x \sin x dx \\ &= I + i \cdot J \end{aligned} \tag{2}$$

(b) と (c)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{x+ix} dx &= \int_0^{2\pi} e^{(1+i)x} dx = \left[\frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} \right]_0^{2\pi} \\ &= \left[\frac{1-i}{(1+i)(1-i)} e^{x+ix} \right]_0^{2\pi} = \left[\frac{1-i}{1-i^2} e^x \cdot e^{ix} \right]_0^{2\pi} \\ &= \left[\frac{e^x}{2} (1-i) e^{ix} \right]_0^{2\pi} \\ &= \left\{ \frac{e^x}{2} (1-i) e^{i2\pi} \right\} - \frac{1-i}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

ここでオイラーの公式より $e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ よって

$$\begin{aligned} (3)\text{ 式} &= \frac{e^{2\pi}}{2}(1-i) - \frac{1-i}{2} \\ &= \frac{(e^{2\pi}-1)(1-i)}{2} \\ &= \frac{e^{2\pi}-1}{2} - i \cdot \frac{e^{2\pi}-1}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

(c) (a) の結果と (4) 式からそれぞれの実部と虚部を比較すると、

$$I = \frac{e^{2\pi}-1}{2} \qquad J = -\frac{e^{2\pi}-1}{2}$$

採点基準：(b) の問題において、左辺をそのまま積分しなかったものや、オイラーの公式を用いていないものは 5 点。

(c) の問題はオイラーの公式を用いなくとも解くことは可能。その場合でも点を与える。

各問題の計算において、些細なミス (符号を誤る等) 程度の物は 1 点減点とする。