数学演習Ｉの纏めの演習（ａ）

提出日：平成 23 年８月２日
番　号：
名　前：

問題　各問に答えよ（いずれも数式のみの羅列は不可）.
問０）任意の実数α，βに対して，つぎの命題が成立することは周知である.

任意の複素数$z$，$w$に対して，$\mathrm{Im}(\alpha z+\beta w)=\alpha\,\mathrm{Im}(z)+\beta\,\mathrm{Im}(w)$.

α，βに複素数の値を許すとこの命題は破綻することを，反例によって示せ.　（５点）

解答）

問１）関数$f$として，適当な複素数$F$を用いてつぎの形に表現できるものを考える.

$$f(x)=\mathrm{Im}\left(Fe^{ix}\right),\quad -\infty<x<+\infty$$

このような$f$がつぎの等式を満足するように，複素数$F$を定めよ.　（１０点）

$$f'(x)+f(x)=\sin x,\quad -\infty<x<+\infty$$

解答）

問２）$f(x)$を$a\sin(x+b)$の形に表わせ．ただし，$a$は非負の実数，$b$は$-\pi<b<\pi$を満たす実数とする.　（５点）

解答）

纏めの演習解答例（課題ａ）

０）$\alpha = i$，$\beta = 0$ をとると，$z = 1$，$w = 0$ のとき，

左辺＝$\mathrm{Im}(\alpha z + \beta w) = \mathrm{Im}(i) = 1 \neq i = i\,\mathrm{Im}(1) = \alpha\,\mathrm{Im}(z) + \beta\,\mathrm{Im}(w)$＝右辺.

１）関数 $f$ を指定された形に制限するとき，関係する関数の表現式,

$$f(x) = \mathrm{Im}\left(Fe^{ix}\right), \quad f'(x) = \mathrm{Im}\left(i \cdot Fe^{ix}\right), \quad \sin x = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right)$$

から，与えられた式はつぎの式と同値である.

$$\mathrm{Im}\left(i \cdot Fe^{ix}\right) + \mathrm{Im}\left(Fe^{ix}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right), \quad -\infty < x < +\infty$$

これは，さらにつぎのように書き直すことができる.

$$\mathrm{Im}\left\{\left((1+i)F - 1\right)e^{ix}\right\} = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

これは，$(1+i)F - 1 = 0$ と同値．よって，求める $F$ はつぎとなる.

$$F = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

２）上で求められた $F$ を $f$ の表現式に代入すると,

$$f(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ix}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

が得られる．□

採点の目安

問０　明確な反例が読み取れるときは５点．それ以外は０点.

問１　条件を満たす $F$ が何らかの形で示されていれば１０点．導出過程に軽微な不備があるときは５点．いずれにも該当しないときは０点.

問２　$a$ と $b$ に対する指定を満たす正解には５点，指定を破った正解には２点，いずれにも該当しない解答には０点.

以下余白