平成 23 年 7 月 12 日出題分

数学演習 I 第 9 回レポート (b)

学籍番号 _____ 氏名 _____

問: 曲線 $y = x \cdot e^{-x}$ と x 軸と $x = q \quad (q > 0)$ とで囲まれる図形の面積を $S(q)$ と置く。このとき極限 $\lim_{q \to \infty} S(q)$ を求めよ。

ヒント：$x \cdot e^{-x}$ は $x \to \infty$ のとき $x \cdot e^{-x} \to 0$ であることを周知として良い。

質問事項 (授業内容に関する物に限る)

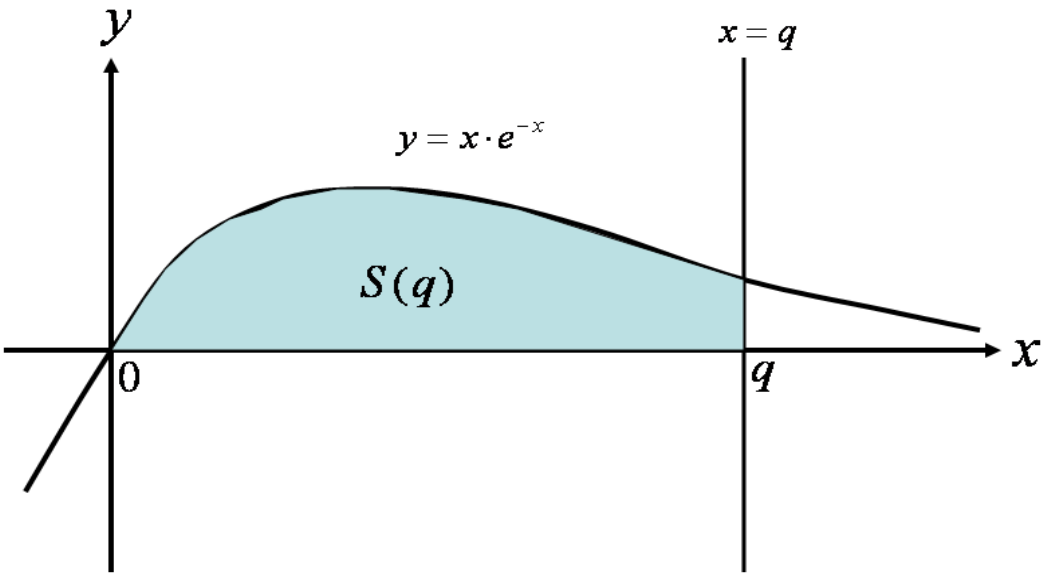
教員の回答:

解答例: $y = x \cdot e^{-x}$ と x 軸と $x = q \quad (q > 0)$ とで囲まれる図形の面積 $S(q)$ は、

$$
\begin{aligned}
S(q) &= \int_0^q x \cdot e^{-x} dx \\
&= \int_0^q x(-e^{-x})' dx \\
&= \Big[-x \cdot e^{-x}\Big]_0^q - \int_0^q 1 \cdot (-e^{-x}) dx \qquad \text{(部分積分)} \\
&= -q \cdot e^{-q} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^q \\
&= -q \cdot e^{-q} - e^{-q} + 1
\end{aligned}
$$

ここで、$q \to \infty$ とすると、ヒントより $q \cdot e^{-q} \to 0$、$e^{-q} \to 0$ であることから、求める極限は

$$\lim_{q \to \infty} S(q) = 1$$



事前説明のメモ (教員用)

- $y = x \cdot e^{-x}$ のグラフを書いた方が良いかもしれない。その際、$x = q$ の直線も記入して求める面積がどの部分かを明示する。

以下余白