平成 23 年 7 月 5 日出題分

数学演習 I 第 8 回レポート (b)

学籍番号 ____________________ 氏名 ________________________

問: $y = f(t)$, $t = g(x)$ からできる合成関数 $y = f(g(x))$ を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

となることを証明せよ。

ヒント：まず、$\frac{dy}{dx}$ を微分の定義通りに

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \tag{1}$$

とし、$g(x+h) = g(x) + u$ と置くのがコツ。

質問事項 (授業内容に関する物に限る)

教員の回答:

解答例:

$y = f(t)$, $t = g(x)$ からできる合成関数 $y = f(g(x))$ を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \tag{2}$$

ここで、$g(x+h) = g(x) + u$ と置くと

$$\begin{aligned} u &= g(x+h) - g(x) \qquad \text{より} \\ \lim_{h \to 0} u &= \lim_{h \to 0} \{g(x+h) - g(x)\} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

したがって、

$$h \to 0 \quad \text{のとき、} \quad u \to 0$$

さらに、$g(x) = t$ とおくと (2) は

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x)+u) - f(g(x))}{u} \cdot \frac{u}{h} \quad \text{(3) より} \quad (u\ \text{で割った分、}u\ \text{でかけている}) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(t+u) - f(t)}{u} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (h \to 0\ \text{のとき}\ u \to 0) \end{aligned} \tag{4}$$

(4) 式は $f'(t) = \frac{dy}{dt}$, $g'(x) = \frac{dt}{dx}$ の定義式そのものなので、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \tag{5}$$

となる。q.e.d.

事前説明のメモ (教員用)

- 明示したヒントのまま素直に計算させた後、u で割って u でかける部分が解れば証明できる。この部分がネックになる可能性が高い。

以下余白