数学演習Ｉの演習レポート（ａ）

提出日：平成 23 年 7 月 5 日
番　号：
名　前：

問題　$f'(x) = f(x)$（微分しても変わらない）を満足する関数 f は，指数関数（またはその定数倍）に限ることを証明せよ.

手引　$e^{-x} f(x)$ が定数であることを，微分することによって示せ.

解答（数式のみの羅列は不可）

質問事項（授業内容に関するものに限る）

教員の回答：

数学演習解答例（７月５日の課題ａ）

積の微分公式および合成関数の微分公式を駆使することにより，つぎの等式を得る．

$$\left(e^{-x}f(x)\right)' = \left(e^{-x}\right)' f(x) + e^{-x}f'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f(x) = 0\,.$$

ここに，第１の等式の右辺第２項において，$f'(x) = f(x)$ を適用した．

これから，$e^{-x}f(x)$ は定数であると判る．その値を C とおけば，任意の x に対して，

$$e^{-x}f(x) = C$$

が成立つ．すなわち，

$$f(x) = Ce^{x}, \quad -\infty < x < +\infty$$

となる．□

備考）$f(0) = 1$ なる条件を追加すれば，$f(x) = e^{x}, \quad -\infty < x < +\infty$ が言える．

事前説明のメモ（教員用）

・積の微分公式（含微分可能性）とその導出過程を説明する．
・合成関数の微分公式（含微分可能性）と，平均値の定理による証明〔下記〕の概要を示した上で，問題ｂは少し異なる条件下でのより簡単な証明であることを説明する．
・微分係数がいたるところ０の関数は定数であることを，平均値の定理で説明する．

命題　f は導関数が $x=g(a)$ で連続，g は $x=a$ において微分可能とする．関数 h を

$$x \mapsto f[g(x)]$$

によって定義するとき，h は $x=a$ において微分可能で，つぎが成立つ．

$$h'(a)=f'[g(a)]g'(a)$$

証明　平均値の定理により，つぎの等式が成立つ．

$$f[g(x)]-f[g(a)]=f'(c)[g(x)-g(a)]$$

ただし，c は $g(a)$ と $g(x)$ の間の適当な点を表わす．両辺を $x-a$ で割った式

$$\frac{f[g(x)]-f[g(a)]}{x-a}=f'(c)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

において $x \to a$ とし，$c \to g(a)$ であることに注意すると，右辺の極限値が存在し，

$$\lim_{x \to a}\frac{f[g(x)]-f[g(a)]}{x-a}=f'[g(a)]g'(a)$$

となることがわかる．□

備考）「f の導関数が $x=g(a)$ で連続」なる条件を「f は $x=g(a)$ において微分可能」へと緩める代りに，

「$\delta>0$ が存在して，　$0<|x-a|<\delta \Rightarrow\ g(x)-g(a)\neq 0$」

という条件を付加すると，同じ微分公式がより簡潔に導出される（問題ｂ）．

以下余白