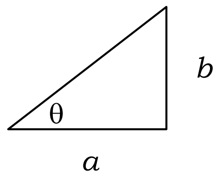
三角関数の和を複素数で論じる

$a > 0$ で b は実数のとき，

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin\left(x + \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

が成立つ．そのひとつの証明はつぎのとおり．



$\theta = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ とおくと，　$a = \sqrt{a^2+b^2}\cos\theta$，

$b = \sqrt{a^2+b^2}\sin\theta$　なので，

左辺＝$\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\theta + \cos x\sin\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$＝右辺．□

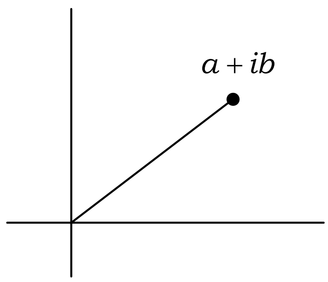
それとは別に：

$$a\sin x = \mathrm{Im}\{(a+i0)(\cos x + i\sin x)\}$$
$$b\cos x = \mathrm{Im}\{(0+ib)(\cos x + i\sin x)\}$$

であることを用いると，

$$a\sin x + b\cos x = \mathrm{Im}\{(a+ib)(\cos x + i\sin x)\}.$$

ここで，$a+ib$ を極形式にすると，



$$a+ib = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

であるから，

$$a\sin x + b\cos x = \mathrm{Im}\{(a+ib)(\cos x + i\sin x)\} = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos(x+\theta) + i\sin(x+\theta)\right)\right\}$$

となる．これからも，始めの等式が得られる．□

一般化すると：　c_1 と c_2 をそれぞれ任意の複素数とするとき，

$$|c_1|\sin(x + \arg c_1) = \mathrm{Im}\{c_1(\cos x + i\sin x)\},$$
$$|c_2|\sin(x + \arg c_2) = \mathrm{Im}\{c_2(\cos x + i\sin x)\}$$

の和を右辺で考えれば，つぎのように簡単に計算できる．

$$\mathrm{Im}\{(c_1+c_2)(\cos x + i\sin x)\} = |c_1+c_2|\sin(x + \arg(c_1+c_2))$$

すなわち，適当な複素数 c によって，

$$f(x) = \mathrm{Im}\{c(\cos x + i\sin x)\},\quad -\infty < x < +\infty$$

と表現できる関数 f の全体を考えるとき，それは複素数 c の全体である複素平面と１対１に対応し，そこでの関数どうしの和は複素数どうしの和に帰着する．

以下余白