

## 数学演習 I 第 7 回レポート (b)

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

問:  $m, n$  を自然数とすると、次式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

ヒント: 以下の三角関数の「積和の公式」は既知として良い。

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \quad (1)$$

質問事項 (授業内容に関する物に限る)

教員の回答:

解答例:  $m, n$  を自然数とする。  $mx = \alpha, nx = \beta$  と置くと、三角関数の積和の公式は (1) となるので、  
(I)  $m \neq n$  のとき、(1) 式より

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x - \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

( $m, n$  は自然数だから  $\sin(m+n)\pi$  は 0)

(II)  $m = n$  のとき、加法定理 (倍角の公式) より

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mxdx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{2m} \sin 2mx \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} (\pi + \pi) = \pi\end{aligned}$$

以上 (I) (II) より、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

がいえた。Q.E.D.

## 事前説明のメモ (教員用)

- 明示したヒントのまま素直に計算してくれれば、結論に至るので、ヒントがうまく理解できない学生にのみヒントの意味を解説する。
- 後のフーリエ解析とも関連する問題であることを、解説時に触れておく。(あくまで「触れておく」だけ。)

以下余白