数学演習Ｉの演習レポート（ａ）

提出日：平成 23 年 6 月 21 日
番　号：
名　前：

問題　つぎの極限値をそれぞれ求めよ．

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{2x}{x^2+1}dx\,,\quad \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{eb}\frac{2x}{x^2+1}dx$$

ただし，$e$ は自然対数の底を表わす．また，つぎの関係は周知としてよい．

$$\left(\log(x^2+1)\right)'=\frac{2x}{x^2+1}$$

解答（数式のみの羅列は不可）

質問事項（授業内容に関するものに限る）

教員の回答：

数学演習解答例（６月 21 日の課題ａ）

微分積分の基本定理により，任意の定数$a$，$b$に対して，

$$\int_a^b \frac{2x}{x^2+1}dx = \log(b^2+1)-\log(a^2+1) = \log\frac{b^2+1}{a^2+1}.$$

これから，第一の極限値はつぎとなる．

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{2x}{x^2+1}dx = \lim_{b\to+\infty} 0 = 0$$

一方，

$$\int_{-b}^{eb}\frac{2x}{x^2+1}dx = \log\frac{e^2b^2+1}{b^2+1} = \log\left(e^2+\frac{1-e^2}{b^2+1}\right)$$

より，第二の極限値は，

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{eb}\frac{2x}{x^2+1}dx = \log\left(e^2\right) = 2$$

となる．□

備考） $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{2x}{x^2+1}dx$ は０に確定するが， $\displaystyle\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b}\frac{2x}{x^2+1}dx$ は確定しない．

事前説明のメモ（教員用）

・連続関数の積分はグラフの下の面積であることを説明する．
・微分積分の基本定理を説明し，今回の問題にそのまま使えることを注意する．
・対数関数は指数関数の逆関数であることを，念のため説明する．

以下余白