平成 23 年 6 月 14 日出題分

# 数学演習 I 第 6 回レポート (b)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(質問事項は裏側に記入のこと)

**問:** 以下の関数

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \tan^{-1} \frac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

について、$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ を示すことにより、$f(x)$ が $x = 0$ で微分不可能であることを示せ。
なお、$f'_+(0)$, $f'_-(0)$ とは、それぞれ $f'(0)$ の右側微分係数と左側微分係数であり、

$$f'_+(0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \qquad f'_-(0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

で定義される。

**ヒント:**定義式にしたがって、素直に右側・左側微分係数を求めてみよう。

質問事項 (授業内容に関する物に限る)

教員の回答:

**解答例:**

右側・左側微分係数の定義式にしたがって、$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ を示す。

**(I)**

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \to +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h \to +0} \frac{h \cdot \tan^{-1} \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to +0} \tan^{-1} \frac{1}{h} \\ &= \frac{\pi}{2} \quad \left( \frac{1}{h} \to +\infty \right) \end{aligned}$$

**(II)**

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \to -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h \to -0} \frac{h \cdot \tan^{-1} \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to -0} \tan^{-1} \frac{1}{h} \\ &= -\frac{\pi}{2} \quad \left( \frac{1}{h} \to -\infty \right) \end{aligned}$$

以上 **(I)** **(II)** より、$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ なので、$f(x)$ は $x = 0$ で微分不可能。q.e.d.

事前説明のメモ (教員用)

- 微分可能であれば右側・左側微分係数 (右極限・左極限の方が良いか?) は一致することを説明する。
- $\tan^{-1} x$ のグラフについて、再度説明する。
- 明示したヒントのまま素直に計算してくれれば、結論に至るので、ヒントがうまく理解できない学生にのみヒントの意味を解説する。

以下余白