

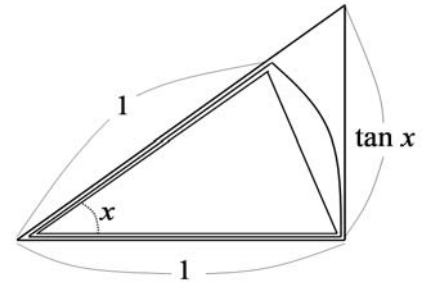
数学演習 I 第5回レポート (b)

学籍番号 _____ 氏名 _____

問: 以下の三角関数の極限についての公式を証明せよ。

$$(I) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ヒント: 公式 (I) は図形的にできる。



図のように、半径1、中心角 x ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) の扇形と2つの三角形の面積の大小関係から不等式を作ってみよう。

質問事項 (授業内容に関する物に限る)

教員の回答:

解答例:

図の扇形と2つの三角形の大小関係から、次の不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x \leq \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

各辺を2倍して、

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

ここで、 $x > 0, \cos x > 0$ から、(1) 式の $\sin x \leq x$ より、両辺を x で割って

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad (2)$$

同じく (1) 式の $x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$ より、両辺に $\frac{\cos x}{x}$ をかけて

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x}$$

以上より、

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad (3)$$

(なおこれは、 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のときも成り立つ)

式 (3) より、 $x \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ だから、挟み撃ちの原理により、

$$(I) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

が成り立つ。 q.e.d.

事前説明のメモ (教員用)

- 明示したヒントを元に回答してくれればよいので、ヒントがうまく理解できない学生にのみヒントの意味を解説する。

以下余白