平成 23 年 5 月 31 日出題分

数学演習 I 第 4 回レポート (b)

学籍番号 ____________________ 氏名 ________________________

(質問事項は裏側に記入のこと)

問: 整数 n に対して、次の公式が成り立つ。

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

これをド・モアブルの定理という。
この定理を数学的帰納法を用いて、少なくとも正の整数について成り立つことを証明せよ。

質問事項 (授業内容に関する物に限る)

教員の回答:

解答例: $n=0,1$ のとき、($n=0$ のときはオマケ)

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^0 &= \cos 0+i\sin 0=1 \qquad (1)\\ (\cos\theta+i\sin\theta)^1 &= \cos\theta+i\sin\theta\end{aligned}$$

となって成り立つ。
$n=k$ のとき

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta \qquad (2)$$

が成り立つと仮定する。
$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta+i\sin\theta)^k\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad \text{(2) より}\\ &= \cos k\theta\cos\theta+i\cos k\theta\sin\theta+i\sin k\theta\cos\theta+i^2\sin k\theta\sin\theta\\ &= (\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta) \quad \text{加法定理より}\\ &= \cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

となって成り立つ。よって数学的帰納法により、n が正の整数のとき成り立つ。
(回答はここまででよい。以下の負の数の場合はオマケ。)

次に、n が負の整数の時、$n=-m$ $(m=1,2,3,\cdots)$ とおくと、

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^n &= (\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}\\ &= \left(\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)^m\\ &= \left(\frac{\cos 0+i\sin 0}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)^m \qquad \text{(1) より}\\ &= \{\cos(0-\theta)+i\sin(0-\theta)\}^m \qquad \text{(a) 問題の応用}\end{aligned}$$

今、m は $m=1,2,3,\cdots$ なのでド・モアブルの定理が使えるから、

$$\begin{aligned}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^m &= \cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)\\ &= \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\end{aligned}$$

となって n が負の整数の時も成り立つ。
以上より、n が全て整数の時、ド・モアブルの定理は成り立つ。

事前説明のメモ (教員用)

- 問題 a で $w = z$ とした場合を事前に教えても良い。
- 加法定理の使用は問題 a と同様なので、そこは適宜指摘する。

以下余白