

数学演習 I の演習レポート (a)

提出日：平成 23 年 5 月 31 日

番 号：

名 前：

問題 任意の 0 でない複素数 z と w に対して成立つ等式

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w$$

を，三角関数の加法定理から導出せよ。

備考： $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

解答 (数式のための羅列は不可)

質問事項 (授業内容に関するものに限る)

教員の回答：

数学演習解答例（5月31日の課題a）

z の偏角を α ， w の偏角を β とすると，

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$$

と書けるので，これらの積はつぎとなる．

$$\begin{aligned} zw &= |zw|(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= |zw| \{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)\} \end{aligned}$$

右辺に三角関数の加法定理を適用すると，

$$zw = |zw| \{\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)\}$$

となる．すなわち，

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w$$

であるとわかる．□

事前説明のメモ（教員用）

- 複素数の絶対値と偏角による表示方法（極形式）を説明する．その際，原点を中心とする単位円上の点が $z = \cos(\arg z) + i \sin(\arg z)$ と書けることを注意する．
- 積の絶対値に関して， $|zw| = |z||w|$ が成立つことの証明を示す．
- 偏角に関する等式 $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ ($z \neq 0, w \neq 0$) が成立つことと，その意味を説明する．ただし証明は保留し，演習問題とすることを予告するに留める．

以下余白