数学演習Ｉの演習レポート（ａ）

提出日：平成 23 年 5 月 17 日
番　号：
名　前：

問題　任意の実数 x に対し，つぎの方程式によって正の実数 y が確定する．

$$\int_1^y \frac{1}{u}\,du = x, \quad -\infty < x < +\infty$$

この関係を $y = f(x)$ と書くとき， $f' = f$ が成立つことを示せ． f が微分可能であることは証明無しに使用してよいが，対数関数を用いてはならない．

解答（数式のみの羅列は不可）

質問事項（授業内容に関するものに限る）

教員の回答：

数学演習解答例（５月 17 日の課題ａ）

関数 g をつぎにより定義する．

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{u} du, \quad 0 < x < +\infty$$

これを用いて，$\displaystyle\int_1^{f(x)} \frac{1}{u} du = x$ を書き直せば，つぎとなる．

$$g\big(f(x)\big) = x$$

両辺をそれぞれ微分すると，

$$g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 1$$

となり，$g'(x) = \dfrac{1}{x}$ であることに注意すれば，さらにつぎとなる．

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

すなわち，

$$f'(x) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

が成立つ．□

事前説明のメモ（教員用）

・関数 $f : R \to (0, +\infty)$ が，

$$\int_1^{f(x)} \frac{1}{u} du = x, \quad -\infty < x < +\infty$$

を満たすことから，（いたるところ微分可能で）つぎが成立つことを説明する．

$$f'(x) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty; \quad f(0) = 1$$

・上の性質から $\left(\dfrac{f(x+a)}{f(x)}\right)' = 0$ となり，したがって $\dfrac{f(x+a)}{f(x)}$ は定数であるから，

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} = \frac{f(0+a)}{f(0)} = f(a),$$

すなわち指数法則： $f(x+a) = f(x)f(a)$ が成立つことを説明する．

・ $e = f(1)$ とおくと，指数法則から，任意の自然数と整数の組 (m,n) に対し，

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}}$$

が成立つことを説明し，これにもとづいて， e^x を実数全体に一意的に拡張できることを説明する．

以下余白