

平成 23 年 5 月 10 日出題分

## 数学演習 I 第 1 回レポート (b)

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

問: 命題「 $\sqrt{2}$ は無理数である」ことを証明せよ。

質問事項 (授業内容に関する物に限る)

教員の回答:

解答例: 「背理法」を用いて証明する。

「 $\sqrt{2}$ は有理数である」と仮定すると、

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \quad (1)$$

とおける。ここで、 $m, n$ は互いに素な ( $m, n$ は1以外の公約数を持たない) 正の整数である。

(1)より、

$$\sqrt{2}m = n \quad (2)$$

この両辺を2乗して

$$2m^2 = n^2 \quad (3)$$

(3)の左辺は2の倍数であるから、右辺の $n^2$ も2の倍数。よって $n$ は2の倍数。

(「 $n^2$ が2の倍数ならば、 $n$ は2の倍数」は、その対偶「 $n$ が2の倍数でないならば、 $n^2$ は2の倍数でない」が真であることからいえる。 $n$ は正の整数だから。)

従って、

$$n = 2k \quad (k: \text{正の整数}) \quad (4)$$

とおける。(4)を(3)に代入して、

$$\begin{aligned} 2m^2 &= (2k)^2 \\ 2m^2 &= 4k^2 \\ m^2 &= 2k^2 \end{aligned} \quad (5)$$

(5)の右辺が2の倍数より、左辺の $m^2$ も2の倍数。

よって、 $m$ は2の倍数。

以上より、 $m$ と $n$ は共に2の倍数となり、 $m$ と $n$ は互いに素の条件に反する。よって矛盾。

したがって、「 $\sqrt{2}$ は無理数である。」は真。q.e.d.

## 事前説明のメモ (教員用)

- 「実数は有理数と無理数からできている」ことを説明する。
- 「実数のうち、有理数でないものは全て無理数である」ことを説明する。
- 「有理数は必ず  $n/m$  ( $n, m$  は互いに素な正数。符号は任意。ただし  $m$  は  $0$  でない、かつ  $n$  は  $0$  も可) で表すことができる」ことを説明する。(これは  $a$  と同様)
- 「“  $n, m$  が互いに素 ” とは、分数にしたとき既約分数になっている」ことを説明する。
- $b$  の問題を解かせるとき、例として  $\sqrt{3}$  の場合を黒板で説明する。このとき「背理法」を用いることも説明する。

以下余白