平成 21 年 4 月 20 日出題分

第 2 回レポート (解答例)

問 1: $131_8 - 45_{16} = (\quad)_{10}$
( ) に入る数字はいくらか？

解答例:
　全て 10 進数に直して計算すると、

$$\begin{aligned}131_8 &= 1 \times 8^2_{10} + 3 \times 8^1_{10} + 1 \times 8^0_{10} \\ &= 64_{10} + 24_{10} + 1_{10} \\ &= 89_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}45_{16} &= 4 \times 16^1_{10} + 5 \times 16^0_{10} \\ &= 64_{10} + 5_{10} \\ &= 69_{10}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}131_8 - 45_{16} &= 89_{10} - 69_{10} \\ &= 20_{10}\end{aligned}$$

従って、答えは **20**。

　(他にも多数の方法がある。)

問 2: ある自然数 X を 2 進数で表現すると、1 と 0 が交互に並んだ $2n$ 桁の 2 進数 $1010\cdots10$ なった。このとき、X に関して以下の式が成立する。その理由を述べなさい。

$$X + \frac{X}{2} = 2^{2n} - 1$$

　解答例: 題意より X を 10 進数に直すと

$$X = 2^{2n-1} + 2^{2n-3} + 2^{2n-5} + \cdots + 2^1$$

よって $\frac{X}{2}$ も同様に

$$\frac{X}{2} = 2^{2n-2} + 2^{2n-4} + 2^{2n-6} + \cdots + 2^0$$

よって

$$X + \frac{X}{2} = 2^{2n-1} + 2^{2n-2} + 2^{2n-3} + \cdots + 2^1 + 2^0 \tag{1}$$

(1) 式右辺は初項が 1、公比が 2、項の数が 2n 個の等比数列の和になっているので、

$$
\begin{aligned}
X+\frac{X}{2} &= \frac{1\cdot(2^{2n}-1)}{2-1} \\
&= 2^{2n}-1
\end{aligned}
$$

よって、与式は成り立つ。
(注 :「等比数列の和」を使って理由を述べる場合、どんな等比数列か (初項、公比、項数) を記述すること。)
(注 2 : 数学的帰納法を使う場合は、きちんと正確につかうこと。)

別解:
X が $X = 101010\cdots10_2$(2n 桁) であるとき、2 進数においては「2 で割る」とは数字を 1 ビットだけ右へずらす (**シフト**という) 行為なので、

$$\frac{X}{2} = 010101\cdots01_2 \quad (\text{2n 桁})$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
X &= 101010\cdots10_2 \quad (\text{2n 桁}) \\
\frac{X}{2} &= 010101\cdots01_2 \quad (\text{2n 桁}) \\
+)\quad X+\frac{X}{2} &= 111111\cdots11_2 \quad (\text{2n 桁}) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

ここで 2^{2n} を 2 進数で表すと

$$2^{2n} = 1000000\cdots00_2 \quad (\text{2n+1 桁})$$

なので、

$$2^{2n}-1 = 111111\cdots11_2 \quad (\text{2n 桁})$$

となり、(2) 式と等しくなるので、与式は成り立つ。

問 3: $81_{10} - 54_{10}$ の計算を符号を含む 8 桁の 2 進数に直し、2 の補数を用いた加算によって計算し、求めなさい。
(答えは符号を含む 8 桁の 2 進法によって書くこと)

解答例:
まず 81_{10} を符号を含む 8 桁の 2 進数に直す。

$$81_{10} = 0101\ 0001_2$$

次に -54_{10} を符号を含む 8 桁の 2 進数に直す (負の数なので符号以外は 2 の補数表現となる。)

$$-54_{10} = 1100\ 1010_2$$

これを加算すると

$$
\begin{array}{rr}
 & 81_{10} \\
+ & -54_{10} \\
\hline
 & 27_{10}
\end{array}
\quad
\begin{array}{rr}
 & 0101\ 0001_{2} \\
+ & 1100\ 1010_{2} \\
\hline
 & 1\ 0001\ 1011_{2}
\end{array}
$$

桁上がりは無視するので、答えは$0001\ 1011_2 = 27_{10}$