微分方程式に関する講義の補足メモ（H18 電電１年次向け/担当：山中・宮島）

備考：このメモは，線形常微分方程式の講義（微分積分Ⅱの始めの２回の授業を使用）と演習を行なうにあたり，下記の教材を補完するためのものである．なお，受講者の理解度に応じて，さしあたり n が１と２の場合に限定してもよい．

記　工学基礎ミニマム研究会編，数学ミニマム改訂第２版，第６章，学術図書出版社

0　線形斉次方程式に関する例題

例題１　つぎの微分方程式の初期値問題を解け．ただし，k は実定数とする．

$$\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = 0, \quad -\infty < t < +\infty, \quad y(0) = 1$$

解答例　特性方程式 $\lambda + k = 0$ を解くと，$\lambda = -k$．これから，$y(t) = be^{-kt}$ の形の解があることが判る．与えられた初期条件を満足するには，$b = 1$ でなければならないので，

$$y(t) = e^{-kt}, \quad -\infty < t < +\infty$$

となる．解の一意性により，これ以外に解はない．□

例題２　つぎの微分方程式の初期値問題を解け．

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = 0, \quad -\infty < t < +\infty, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 1$$

解答例　特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ を解くと，$\lambda = \pm i$．これから，$y(t) = b_1 e^{it} + b_2 e^{-it}$ の形の解があることが判る．与えられた初期条件を満足するには，$b_1 = 1/2i$，$b_1 = -1/2i$ でなければならないので，

$$y(t) = \frac{1}{2i} e^{it} - \frac{1}{2i} e^{-it} = \sin t, \quad -\infty < t < +\infty$$

となる．解の一意性により，これ以外に解はない．□

例題３　つぎの微分方程式に対し，実数値をとる解をすべて求めよ．

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = 0, \quad -\infty < t < +\infty$$

解答例　$y(t), \quad -\infty < t < +\infty$ を任意の解とする．$a_0 = y(0)$，$a_1 = \dfrac{dy}{dt}(0)$ とおくと，a_0 と a_1 はともに実数である．そして，解の一意性により，y をつぎのように表わすことができる（例題２を参照）．

$$y(t) = b_1 e^{it} + b_2 e^{-it} \quad (\ b_1 + b_2 = a_0, \quad ib_1 - ib_2 = a_1\ )$$

丸括弧の中の連立１次方程式を解いて b_1 と b_2 を確定し，オイラーの公式を使うと，

$$y(t) = a_0 \cos t + a_1 \sin t$$

となる．逆に，これが解であることは自明である（代入せよ）．よって，すべての解はつぎのように表される．

$$y(t) = a_0 \cos t + a_1 \sin t, \quad -\infty < t < +\infty \text{（} a_0 \text{と} a_1 \text{は実の任意定数）}$$

□

１　非斉次方定式の解

つぎの形の微分方程式を考える．

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + c_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + c_1 \frac{dy(t)}{dt} + c_0 y(t) = u(t), \quad -\infty < t < +\infty \qquad (0)$$

ここに，$c_0, \cdots, c_{n-1}$ は与えられた実定数，u は与えられた区分的連続関数を表わす．

このとき，初期条件（最後の式に注意せよ）

$$y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = \cdots = \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}}(0) = 0, \quad \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) = 1 \qquad (1)$$

を満足する，斉次方定式

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + c_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + c_1 \frac{dy(t)}{dt} + c_0 y(t) = 0, \quad -\infty < t < +\infty \qquad (2)$$

の唯一つの解を g で表わすことにすると，初期条件

$$y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = \cdots = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) = 0 \qquad (3)$$

を満足する(0)の解のひとつをつぎのように表わすことができる．

$$y(t) = \int_0^t g(t-s)u(s)ds, \quad -\infty < t < +\infty \qquad (4)$$

演習　右辺を逐次微分することにより，(4)が(0)の解であることを確かめよ．

ヒント：(4)の右辺を t で微分すると，$g(0)u(t) + \int_0^t g'(t-s)u(s)ds$ となる．

つぎに，一般的な初期条件

$$y(0) = a_0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = a_1, \quad \cdots, \quad \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) = a_{n-1} \qquad (5)$$

を考えよう．$a_0, \cdots, a_{n-1}$ は与えられた実定数である．この初期条件を満足する(2)の解を，$f(t; a_0, \cdots, a_{n-1}), \quad -\infty < t < +\infty$ と表わすことにすると，

$$y(t) = f(t; a_0, \cdots, a_{n-1}) + \int_0^t g(t-s)u(s)ds, \quad -\infty < t < +\infty \qquad (6)$$

が求める唯一つの解である．

演習　（6）が(0)(5)の唯一つの解であることを証明せよ．

ヒント：これが解のひとつになっていることは，線形性から直ちに判る．一意性については，ふたつの解を想定し，それらの差が満足する方程式を導け．

さらに，解の具体的な形を求める．以下では，代数方程式

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0 \qquad (7)$$

が相異なる n 個の根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ をもつ場合のみを扱う．斉次方定式に対する前の議論により，f と g はつぎのように表わされる．

$$f(t; a_0, \cdots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & & \lambda_n^0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

$$g(t) = f(t; 0, \cdots, 0, 1) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & & \lambda_n^0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

g が f の特別の場合として得られることに注意せよ．

2　非斉次方程式に関する例題

例題 4　初期値問題：$\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = \mathbf{1}(t)\sin\omega t, \quad -\infty < t < +\infty$，$y(0) = 0$ を解け．ここに，$\mathbf{1}$ はつぎのような関数を表わす．　$\mathbf{1}(t) := \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$

解答例　対応する斉次方程式の初期値問題

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0, \quad -\infty < t < +\infty, \quad y(0) = 1$$

の解を g とすると，$g(t) = e^{-t}$ となる（例題１を参照）．これから，公式(G)により，

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-s)}\mathbf{1}(s)ds = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 - e^{-t} & (t \geq 0) \end{cases}$$

を得る．□

例題 5　初期値問題：$\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = \sin\omega t, \quad -\infty < t < +\infty$，$y(0) = a$ が，

$$y(t) = A\sin(\omega t - \phi), \quad -\infty < t < +\infty \qquad (A > 0)$$

の形の解をもつように a を定め，併せて解を求めよ．ただし ω は正の定数．

解答例　公式(G)における f と g は，この問題に対してつぎとなる．

$$f(t;a)=ae^{-t}\,,\quad g(t)=e^{-t}$$

これから，与えられた初期値問題の解は，

$$y(t)=ae^{-t}+\int_0^t e^{-(t-s)}\sin\omega s ds=\left(a+\frac{\omega}{\omega^2+1}\right)e^{-t}+\frac{\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{\omega^2+1}$$

となる．したがって，$a=-\dfrac{\omega}{\omega^2+1}$ のとき，

$$y(t)=\frac{\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{\omega^2+1}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\omega\right)$$

の形の解が得られる．□

例題 6　初期値問題：$\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+y(t)=\mathbf{1}(t),\quad -\infty<t<+\infty\,,\quad y(0)=0$ を解け．

解答例　公式(G)における g は，この問題に対してつぎとなる（例題 2 を参照）．

$$g(t)=\sin t$$

よって，解は，$y(t)=\displaystyle\int_0^t\sin(t-s)\mathbf{1}(s)ds=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1-\cos t & (t\geq 0)\end{cases}$ となる．□

例題 7　初期値問題：$\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+y(t)=\sin\omega t,\quad -\infty<t<+\infty\,,\quad y(0)=a_0\,,\quad \dfrac{dy}{dt}(0)=a_1$ が，

$$y(t)=A\sin(\omega t-\phi),\quad -\infty<t<+\infty\qquad (A>0)$$

の形の解をもつように a_0，a_1 を定め，併せて解を求めよ．ただし，ω は 1 より小さい正の定数とする．

解答例　指定された解の形を代入すると，つぎの等式が得られる．

$$(-\omega^2+1)A\sin(\omega t-\phi)=\sin\omega t$$

この式は，$\left((1-\omega^2)A+\cos\phi-1\right)\sin\omega t-(1-\omega^2)A\sin\phi\cos\omega t=0$ と書きなおせるので，

$$\left((1-\omega^2)A+\cos\phi-1\right)=0\,,\quad (1-\omega^2)A\sin\phi=0$$

でなければならない．これから，

$$\sin\phi=0\,,\quad \cos\phi=-1\,,\quad A=\frac{2}{1-\omega^2}$$

となる．すなわち，上の微分方程式の解は

$$y(t)=\frac{2}{1-\omega^2}\sin(\omega t-\pi),\quad -\infty<t<+\infty$$

であり，したがって $a_0=0,\quad a_1=\dfrac{2\omega}{1-\omega^2}$ でなければならない．この y が，これらの a_0，a_1 に対応する初期値問題の唯一解であることは容易に確かめられる．□