微分積分II（H18 年度電気電子工学科向け）の期末試験問題

【注意】答案は専用の用紙に記入すること．問題１と問題３について一枚の答案用紙を用い, 問題２と問題４と問題５についてもう一枚の答案用紙を用いること．各答案用紙は表の面を使用し，裏面は使用しないこと．数式のみの解答は採点対象外とする．ただし，答案用紙には要点のみを記し，細かい計算は問題用紙の余白または裏面にて処理すること．各問の満点は 20 点.

問題１　領域 $D=\left\{(x,y)\mid 9x^2+2y^2<36\right\}$でつぎにより定義された関数 f のグラフに対する，点 $(-1,1)$における接平面の式を求めなさい．

$$f(x,y)=\sqrt{36-9x^2-2y^2}$$

ただし， dx , dy , dz といった記法は使わずに， $z=h(x,y)$ の形に表現すること．

問題２　次の関数の極限値は存在するか？存在するならば，その値を求め，存在しないならば，その理由を述べなさい．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$$

問題３　正方形（とその内部） $S=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\right\}$を含むある領域で定義された関数 f が， S の各点で $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満足し，また

$$f(x,0)=\sin 2\pi x,\quad 0\le x\le 1$$

であるとする． S の各点に対する $f(x,y)$ の具体的な形を確定しなさい．

問題４　関数 $f(x,y)=x^2+6xy+3y^3$ の極値を調べなさい．

問題５　閉領域 $D=\left\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ 2x+y\le 2\right\}$における，重積分

$$\iint_D xy\,dxdy$$

を求めなさい．

以上５問

微分積分II（H18年度電気電子工学科向け）の期末試験解答例

問題１　領域 $D=\{(x,y)\mid 9x^2+2y^2<36\}$ でつぎにより定義された関数 f のグラフに対する，点 $(-1,1)$ における接平面の式を求めなさい．

$$f(x,y)=\sqrt{36-9x^2-2y^2}$$

ただし，dx , dy , dz といった記法は使わずに，$z=h(x,y)$ の形に表現すること．

解答例　$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{-9x}{\sqrt{36-9x^2-2y^2}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{-2y}{\sqrt{36-9x^2-2y^2}}$　より，指定された点における偏微分係数は，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,1)=\dfrac{9}{5}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1)=-\dfrac{2}{5}$．これから，接平面の式は，

$z=\dfrac{36}{5}+\dfrac{9}{5}x-\dfrac{2}{5}y$　となる．□

採点の目安　偏微分係数が正しく求められていれば各５点．それらをもとに接平面の式が正しく書かれていれば，さらに 10 点．接平面を $dz=\dfrac{9}{5}dx-\dfrac{2}{5}dy$ で表現したときは５点の減．このほかに見過ごしがたい不備があれば，３点を減じる．

注　接平面の式が $z-5=\dfrac{9}{5}(x+1)-\dfrac{2}{5}(y-1)$ と書かれているときは，正解として扱う．

問題２　次の関数の極限値は存在するか？存在するならば，その値を求め，存在しないならば，その理由を述べなさい．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$$

解答例　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$　とおいて $r\to 0$ とすると，

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2(1-2\cos\theta\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=1-2\cos\theta\sin\theta$$

よって，原点に近づく角度により極限値が異なるため，極限値は存在しない．□

採点の目安　$1-2\cos\theta\sin\theta$ まで計算出来ていれば，５点．「極限値は存在しない」という結論で５点．存在しない理由まできちんと書けていれば，満点とする．

注　$y=mx$ と置いてやる方法でも可．また，例えば $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{(t-t)^2}{t^2+t^2}\neq\lim_{x\to 0}\frac{(x-0)^2}{x^2+0^2}$ を示すだけでもよい．

問題３　正方形（とその内部）$S=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$を含むある領域で定義された関数 f が，S の各点で $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満足し，また

$$f(x,0)=\sin 2\pi x,\quad 0\le x\le 1$$

であるとする．S の各点に対する $f(x,y)$ の具体的な形を確定しなさい．

解答例　$x\in[0,1]$を任意にとる．このとき，

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0,\quad 0\le y\le 1$$

であるから，任意の $y\in[0,1]$ に対して $f(x,y)=f(x,0)$ が成立つ．すなわち，任意の $(x,y)\in S$ に対して． $f(x,y)=f(x,0)=\sin 2\pi x$ ということである．□

採点の目安　「任意の $y\in[0,1]$ に対して $f(x,y)=f(x,0)$」が示せたら 15 点．それをもとに $f(x,y)$の具体的な形が示せたら，さらに５点．記述その他に見過ごしがたい不備があるときは，３点を減じる．

問題４　関数 $f(x,y)=x^2+6xy+3y^3$ の極値を調べなさい．

解答例 $\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+6y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=6x+9y^2=0\end{array}$ より，極値をとる点の候補は $(x,y)=(0,0),(-6,2)$．

ヘッセ行列 $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 6 & 18y\end{pmatrix}$ の行列式を $\Delta(x,y)$ と書くと，

$(x,y)=(0,0)$のとき $\Delta=2\cdot 0-6^2=-36<0$ より，点 $(0,0)$は極大点でも極小点でもない．

$(x,y)=(-6,2)$ のとき $\Delta=2\cdot 18\cdot 2-6^2=36>0$ で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2>0$ より，点 $(-6,2)$は極小点であり，

極小値は -12．

採点の目安　x と y について１階偏微分が出来ていれば５点．連立方程式から極値の候補を２つ導くことが出来ていれば５点．それぞれの候補について極値の判別が出来ていれば５点づつ．ただし，極小値が書かれてない場合は２点減点，些細な計算ミスがあれば１点減点とする．

注　ヘッセ行列の不定や正定を判別する方法について，正しい方法はすべて正解

として扱う．

問題５　閉領域 $D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\, y\geq 0,\, 2x+y\leq 2\}$ における，重積分

$$\iint_D xy\,dxdy$$

を求めなさい．

解答例　閉領域 D の境界の形より，

$$\iint_D xy\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x} xy\,dy$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx\int_0^{2-2x} xy\,dy &= \int_0^1 dx\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=2-2x}\\ &= \int_0^1 dx\left(2x-4x^2+2x^3\right)\\ &= \left[x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4\right]_0^1\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

採点の目安　問題の閉領域の式（もしくは閉領域を図示）から

$$\iint_D xy\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x} xy\,dy$$

の式が導出できれば 10 点．最後まで出来て 20 点．ただし，些細な計算ミスがあれば 3 点減点．

注　累次積分を $\int_0^1\int_0^{2-2x} xy\,dydx$ や $\int_0^1\left(\int_0^{2-2x} xy\,dy\right)dx$ のように書いた場合も可とする．

以上